Μαθημα 10ο 28/3/2018

Κλασσικη Μηχ

Πεδια κεντρικων δυναμεων

Εξ' ορισμου κεντρικες δυναμεις καλουνται αυτες για τις οποιες $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \cdot \hat{r}$, r η πολικη συντεταγμενη και $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Δηλαδη ειναι οι δυναμεις που εξαρτωνται μονο απο τη μια πολικη συντεταγμενη

Για τις δυναμεις αυτες ισχυει : $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ (γιατι; ΑΣΚΗΣΗ)

Επισης $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|} \times f(r) \cdot \hat{r} = \vec{0}$ αρα και η στροφορμη διατηρειται

Το πεδιο λοιπον ειναι και συντηρητικο και διατηρει τη στροφορμη. Αφου το πεδιο ειναι συντηρητικο το $\vec{F} = \vec{\nabla} V$

Και γενικα (σε σφαιρικες συντεταγμενες)

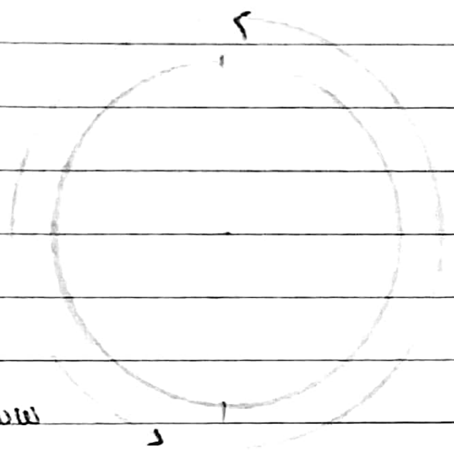
$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{dV}{dr} = f(r)$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{dV}{d\phi} = 0$$

Αρα τα πεδια κεντρικων δυναμεων $V = \int f(r)\, dr$

Συνεπώς οι κεντρικές δυνάμεις είναι συντηρητικές και διατηρούν τη στροφορμή
(το μόνο που χρειάζεται στο αρχικό σύστημα είναι μια μεταβλητή)



ξοδεύω ενέργεια

: Διατηρείται Ενέργεια

μαζεύω ενέργεια

Σύνδεση με τους Νόμους του Νεύτωνα

▸ Ολοκλήρωμα κίνησης

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός υλικού σημείου κάποιες ποσότητες και κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις διατηρούνται

π.χ στροφορμή, ενέργεια, ορμή κ.λ.π

Από το νόμο του Νεύτωνα σε καρτεσιανές συντεταγμένες γνωρίζουμε ότι οι 3 συνιστώσες της δύναμης είναι

$$m\ddot{x} = F_x \qquad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$m\ddot{y} = F_y \qquad \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$
$$m\ddot{z} = F_z$$

και αντίστοιχα οι ορμές είναι

$$P_x = m\dot{x} \qquad P_y = m\dot{y} \qquad P_z = m\dot{z}$$

οι στροφορμές είναι

$$L_x = m(y\dot{z} - \dot{y}z) \qquad L_y = m(z\dot{x} - \dot{z}x) \qquad L_z = m(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

ενέργεια $E = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z)$

Είναι οι ποσότητες που καλούνται και ολοκληρώματα κίνησης

▲ Ας θεωρήσουμε λοιπόν κίνηση σε μία διάσταση ώστε $\vec{F}(\vec{r}) = f(x)\cdot\hat{i}$ τότε από το τύπο του Νεύτωνα έχουμε ότι το (1) $F_x = m\ddot{x} \Rightarrow f(x) = m\cdot\ddot{x} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} - f(x) = 0}$ (μη γραμμική)

αυτόνομη: δεν εμφανίζεται πουθενά η ανεξ. μεταβλητή

$$\Rightarrow m\int \ddot{x}\,dt - \int f(x)\,dt = E \qquad \left\{ \xRightarrow{(\cdot\,\dot{x})} m\ddot{x}\dot{x} - f(x)\cdot\dot{x} = 0 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\int \ddot{x}\dot{x}\,dt - \int f(x)\,\dot{x}\,dt = E$$

$$\Rightarrow m\dot{x} - \int f(x)\,dt = E$$

σύνθετη συνάρτηση

πρέπει να αλλάξω μεταβλητή

$$dx = \frac{dx}{dt}\cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{1}{2}(\dot{x})^2 - \int f(x)\,\underbrace{dx}_{\frac{dx}{dt}\cdot dt} = E$$

Ως δυναμικό ορίσα : $V = -\int f(x)\,dx$

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V = E = \text{σταθερη} \Rightarrow T + V = E = \text{σταθερη}$$

Δειξαμε οτι
ο νομος του Νευτωνα ειναι ισοδυναμος με την αρχη της διατηρησης της ενεργειας !

② Το αντιστροφο
Ξεκινω απο τη διατηρηση ενεργειας, δηλαδη:
$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x)$ παραγωγιζω ως προς t

$$0 = \frac{1}{2}m\dot{x}\ddot{x} + \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{= \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}} = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\dot{x} \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} - f(x)\dot{x} = 0$$

$\Rightarrow m\ddot{x} = f(x)$
Νομος Νευτωνα

(*)
Αν $\dot{x} = 0$ τοτε και παλι ισχυει ο νομος του Νευτωνα
αυτο ισχυει ταυτοτικα
$$\underbrace{m\ddot{x}}_{=0} = \underbrace{f(x)}_{=0}$$

▲ Εξισώσεις Αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς

1) Έστω η διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y'' = f(y)$$

τότε η εξίσωση παραμένει αναλλοίωτη στις μεταθέσεις δηλαδή στο $x \to x + x_0$

2) Η εξίσωση παραμένει αναλλοίωτη στην αντιστροφή της παραμέτρου δηλαδή $x \to -x$

▲ Το αναλλοίωτο ενός φυσικού νόμου σε κάποιο μετασχηματισμό αναφέρεται ως συμμετρία του φυσικού νόμου στο συγκεκριμένο μετασχηματισμό

▲ Συγκεκριμένα για το νόμο του Νεύτωνα

$$m\ddot{x} = f(x)$$

η συμμετρία $t \to -t$ μας επιτρέπει να βρίσκουμε παρελθούσες καταστάσεις, δηλαδή τη θέση, ταχύτητα κ.τ.λ ενός υλικού σημείου στο παρελθόν

▲ Γενικά λοιπόν θεωρούμε την αρχή της Γαλιλαϊκής σχετικότητας

▲ Θεωρούμε μια εξίσωση αναλλοίωτη σε Γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς όταν είναι αναλλοίωτη

$$x \to x' = x - ut$$

$$t \to t' = t$$

(*) οι δυναμεις τριβης εξαρτωνται απο την ταχυτητα κινησης

▲ Υποθετουμε λοιπον σε ενα υλικο σωμα μια δυναμη που εξαρταται απο την ταχυτητα. Ας πουμε

$$F(t) = a(\dot{x})^2 = av^2$$

Δηλαδη $m\frac{d^2x}{dx^2} = av^2 \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = av^2$ 1ου βαθμου

Για τις δυναμεις $F(t) = F(v) = F(\dot{x})$ Νομος Νευτωνα ειναι μια εξισωση πρωτου βαθμου ως προς την ταχυτητα. Η θεση θα προκυψει απο το

$$x = \int \dot{x}\,dt$$

Δυναμεις που εξαρτωνται μονο απο τη θεση $F(t) = F(x)$ ο νομος του Νευτωνα καταληγει στη διατηρηση της ενεργειας:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = E = \text{σταθερη}$$

αλγεβρικη

μια εξισωση πρωτου βαθμου ως προς τη θεση